Trigonométrie - Inégalités à 3 variables

Zweig

22 août 2009

Exercice 1

On pourra être amené à utiliser le résultat suivant [1] :

Soient $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in [0,\, \pi]^3$ les angles d'un triangle. On a l'inégalité suivante :

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$$

1. Soient $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in [0,\, \pi]^3$. Montrer que ces 3 réels sont des angles d'un triangle si et seulement si :
$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2} = 1$$

2. Soient (a, b, c) et (x, y, z) deux triplets de réels. Montrer l'inégalité suivante [2] :
$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

3. En déduire l'inégalité suivante, valable pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$ vérifiant $xy + xz + yz = 1$:
$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+x)(y+z)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+x)}} \leq 1$$

1. Classiquement, on démontre ce résultat à l'aide de la concavité de la fonction $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ sur $[0,\, \pi]$. En effet, comme $f"(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,\, \pi]$, alors f est concave sur cet intervalle. Ainsi d'après l'inégalité de Jensen, nous avons :

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)}{3} \leq f\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq 3\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

2. Cette inégalité porte le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz. On peut généraliser le résultat dans le cas où on considère deux n-uplets $(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$ et $(b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n)$ de réels. On a alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Solution.

1. Nous disposons des formules élémentaires suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos\, a \cdot \cos\, b - \sin\, a \cdot \sin\, b \tag{1}$$
$$\sin\,(a+b) = \sin\, a \cdot \cos\, b + \cos\, a \cdot \sin\, b \tag{2}$$
$$\tan\,(a+b) = \frac{\tan\, a \cdot \tan\, b}{1 - \tan\, a \cdot \tan\, b} \tag{3}$$
$$\tan\,\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \frac{1 - \tan\, a \cdot \tan\, b}{\tan\, a \cdot \tan\, b} \tag{4}$$

Démonstration. D'après la formule d'Euler nous avons :

$$\begin{aligned}
\cos\, a \cdot \cos\, b - \sin\, a \cdot \sin\, b &= \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right) - \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\right) \cdot \left(\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)} + 2e^{-i(b-a)} + e^{-i(a+b)} + e^{i(a+b)} - 2e^{-i(b-a)} + e^{-i(a+b)}\right) \\
&= \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} \\
&= \cos\,(a+b)
\end{aligned}$$

On montre d'une manière analogue (2).
Pour la (3), on revient à la définition de la fonction tan :

$$\begin{aligned}
\tan\,(a+b) &= \frac{\sin\,(a+b)}{\cos\,(a+b)} \\
&= \frac{\sin\, a \cdot \cos\, b + \cos\, a \cdot \sin\, b}{\cos\, a \cdot \cos\, b - \sin\, a \cdot \sin\, b} \\
&= \frac{\tan\, a \cdot \tan\, b}{1 - \tan\, a \cdot \tan\, b}
\end{aligned}$$

après division par $\cos\, a \cdot \cos\, b$.
La (4) est directe :

$$\begin{aligned}
\tan\,\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) &= \frac{\sin\,\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right)}{\cos\,\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right)} \\
&= \frac{\cos\,(a+b)}{\sin\,(a+b)} \\
&= \tan^{-1}\,(a+b) \\
&= \frac{1 - \tan\, a \cdot \tan\, b}{\tan\, a \cdot \tan\, b}
\end{aligned}$$

On suppose que les réels du triplet $(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ vérifie la relation de départ. Compte tenu des formules précédentes, nous obtenons alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} \left(\tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \right) = 1 - \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} \\
&\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \tan^{-1} \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) \\
&\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) = \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) \\
&\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right) = 0
\end{aligned}$$

D'où $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ car $\alpha,\, \beta,\, \gamma \geq 0$
Réciproquement, supposons $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Alors d'après (4) nous avons :

$$\begin{aligned}
\tan \frac{\gamma}{2} &= \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \\
&= \frac{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha \cdot \tan \beta}
\end{aligned}$$

Si bien que

$$\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = 1$$

2. *Démonstration 1.* Soient $\overrightarrow{u}(a,\, b,\, c)$ et $\overrightarrow{v}(x,\, y,\, z)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le calcul de leur produit scalaire permet de conclure. En effet :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 &= (ax + by + cz)^2 \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2 \cdot \cos^2 (\overrightarrow{u},\, \overrightarrow{v}) \\
&\leq \|\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)
\end{aligned}$$

D'où le résultat, avec égalité lorsque les vecteurs sont colinéaires.

Démonstration 2. Soit $\Delta = (-2(ax + by + cz))^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0$. Montrer que l'inégalité est vraie revient à montrer que le polynôme du second degré $P(X)$ associé à ce discrminant est du même signe que le coefficient de son monôme de plus haut degré pour tout réel X, ici donc, positif. Le polynôme du second degré associé à ce discriminant est :

$$\begin{aligned}
P(x) &= (a^2 + b^2 + c^2)X^2 - 2(ax + by + cz)X + (x^2 + y^2 + z^2) \\
&= \left((aX)^2 - 2\,(aX)\,x + x^2\right) + \left(bX)^2 - 2\,(bX)\,y + y^2\right) + \left((cX)^2 - 2\,(cX)\,z + z^2\right) \\
&= (aX - x)^2 + (bX - y)^2 + (cX - z)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat, avec égalité lorsqu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lambda = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

3. Pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$ il existe un triplet $(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ de réels vérifiant

$$\begin{cases} \tan\,\frac{\alpha}{2} = x \\ \tan\,\frac{\beta}{2} = y \\ \tan\,\frac{\gamma}{2} = z \end{cases}$$

Comme $xy + xz + yz = 1$, alors $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ avec $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in [0,\, \pi]^3$ d'après 1). Or d'après les formules trigonométriques nous obtenons :

$$\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{x^2}} = \sqrt{\frac{\left(\tan\,\frac{\alpha}{2} + \tan\,\frac{\beta}{2}\right)\left(\tan\,\frac{\alpha}{2} + \tan\,\frac{\gamma}{2}\right)}{\tan^2\,\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\,\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\sin\,\frac{\alpha}{2}}$$

et des formules similaires pour les autres termes.
Dans ces conditions, l'inégalité à démontrer se résume comme suit :

$$\frac{\sin\,\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\,\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\,\frac{\beta}{2}}{1 + \sin\,\frac{\beta}{2}} + \frac{\sin\,\frac{\gamma}{2}}{1 + \sin\,\frac{\gamma}{2}} \leq 1$$

Ou encore,

$$\frac{1}{1 + \sin\,\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{1 + \sin\,\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{1 + \sin\,\frac{\gamma}{2}} \geq 2$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\left(\frac{1}{1 + \sin\,\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{1 + \sin\,\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{1 + \sin\,\frac{\gamma}{2}}\right)\left(1 + \sin\,\frac{\alpha}{2} + 1 + \sin\,\frac{\beta}{2} + 1 + \sin\,\frac{\gamma}{2}\right) \geq (1+1+1)^2$$

D'où d'après l'inégalité de l'introduction,

$$\frac{1}{1 + \sin\,\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{1 + \sin\,\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{1 + \sin\,\frac{\gamma}{2}} \geq \frac{9}{3 + \frac{3}{2}} = 2$$

Exercice 2

1. Montrer que pour tout triplet de réels positifs $(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$, tels que $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in [0,\, \pi]^3$ et $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, il existe un triplet de réels positifs $(x,\, y,\, z)$ vérifiant les égalités suivantes :

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}$$
$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+x)(y+z)}}$$
$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}}$$

2. Montrer l'inégalité de Jordan :

$$\forall \alpha \in \left(0,\, \frac{\pi}{2}\right) \;:\; \frac{2\alpha}{\pi} \leq \sin\alpha \leq \alpha$$

3. En déduire l'inégalité suivante, valable pour tous $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}_+^3$:

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \geq 2\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{x+y+z}}$$

Solution.

1. Soit ABC un triangle de côtés $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$ et d'angles $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$. D'après la relation d'Al-Kashi nous avons :
$$\begin{aligned} & a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\, \alpha \\ \Leftrightarrow\ & a^2 = (b+c)^2 - 2bc - 2bc \cdot \cos\, \alpha \\ \Leftrightarrow\ & 1 + \cos\, \alpha = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2\, \frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc} \end{aligned}$$
D'après l'inégalité triangulaire, il existe un triplet $(x,\, y,\, z)$ de réels positifs vérifiant :
$$\begin{cases} x = b + c - a \\ y = a + c - b \\ z = a + b - c \end{cases}$$
On obtient finalement
$$\begin{aligned} \cos\, \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} \end{aligned}$$
Par permutation circulaire, on obtient les autres relations.
2. Soit $f(x) = \pi \sin\, x - 2x$ et $g(x) = \sin\, x - x$. Une brève étude de la dérivée de ces deux fonctions sur $\left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]$ nous donne l'encadrement désiré.
3. On pose $u = \frac{\pi - \alpha}{2}$, $v = \frac{\pi - \beta}{2}$ et $w = \frac{\pi - \gamma}{2}$. Alors $u + v + w = \pi$ et $(u,\, v,\, w) \in [0,\, \frac{\pi}{2}]^3$. Ainsi ces trois réels sont les angles d'un triangle acutangle. De plus, remarquons les égalités suivantes :
$$\begin{aligned} \sin\, u &= \cos\, \frac{\alpha}{2} \\ \sin\, v &= \cos\, \frac{\beta}{2} \\ \sin\, w &= \cos\, \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$
L'inégalité à démontrer se réécrit :
$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+x)(y+z)}} + \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}} \geq 2$$
D'après 1), il existe un triplet $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in [0,\, \pi]^3$ tel que
$$\begin{aligned} \cos\, \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} \\ \cos\, \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+x)(y+z)}} \\ \cos\, \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}} \end{aligned}$$

On est donc ramené à montrer l'inégalité suivante :

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \geq 2$$

Ou encore, d'après notre remarque :

$$\sin u + \sin v + \sin w \geq 2$$

Or, d'après l'inégalité de Jordan :

$$\sin u + \sin v + \sin w \geq \frac{2(u+v+w)}{\pi} = 2$$